

慣性モーメントを考慮したグランドアクションのタッチ調整

パート1：慣性モーメント—その性質が見い出されてきた

オーストラレーリアンピアノ調律技術者協会ニュージーランド支部ARPT会員 中村祐司

これはピアノテクニシャンズジャーナル2014年9月号に掲載された論文を著者自身が日本語訳したものです。

タッチの改良に慣性モーメントを取り入れる

最近ピアノテクニシャンズジャーナルに、ピアノアクションにおける慣性モーメントの説明とその利用法についていくつか論文が発表されました。それらの記事によって慣性モーメントのコンセプトと理論的な説明がわかりやすくなされました。ジョン・ローズとダレル・ファンドリックの共著による論文（ジャーナル2013年7月号）では角加速度を計測することによって慣性モーメントを求めています。もう一つはフランク・エマーソンによる論文（2013年4月号）で、鍵盤鉛の位置とそれらの重心位置との関係で慣性モーメントを説明しました。

一つ目の論文で紹介された角加速度の測定は一般的に言って不可能ではないものの、調律関連業務を日常の仕事としている調律師には難しいやり方です。二つ目の論文では角加速度について論じた上で、鍵盤鉛の重心が鍵盤の特定の比率の場所に来るような配置を提案しています。

私もまた、しばらくピアノアクションで慣性モーメントをどのように考えたら良いか考えてきました。そこから作り上げた私の慣性モーメントのアクションへの実務的な応用方法が、この課題の議論に一石投じることができるものと思います。

ある物体の慣性モーメントはその限りなく小さい部分の質量と与えられた回転軸からの距離の二乗の積をその物体全体に積算したものである。

私のやり方では、アクションの個々の部品すなわちハンマーアッセンブリー・ウイペン・鍵盤の3つに対して、物理学で定義された慣性モーメントの求め方を簡便な方法で応用してその値を求めるといえるものです。純粋に上記の定義に則りながら、事前に分かっている寸法で適当な区画に分け、そのそれぞれに対して質量とその重心と回転中心との距離の二乗を積算していった慣性モーメントの値を計算します。例を上げてそのやり方を紹介していきましょう。

各アクション部品の慣性モーメントを算出する

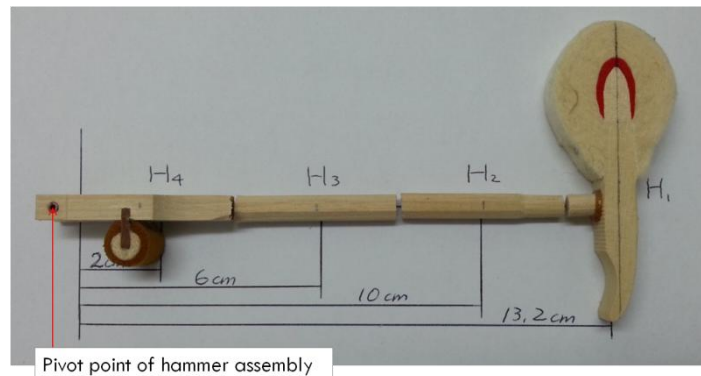
ハンマーアッセンブリー

例に使うハンマーは図版1のように4つの部分に分割しました。理論では個々の部分は限りなく小さく分けることになっていますが、われわれの仕事に使う分析では写真に示すように4cmごとに分けるので十分です。フレンジは回転部分ではありませんので計算には入れません。

それぞれの部分の質量を H_1 、 H_2 、 H_3 、 H_4 として、慣性モーメントを計算で求めます。（著者日本語訳注：計算式では慣性モーメントを英語での頭文字 **MoI** (Moment of Inertia) を使って記述しています。）

$$MoI_{(Hammer)} = H_1 x (2)^2 + H_2 x (6)^2 + H_3 x (10)^2 + H_4 x (13.2)^2$$

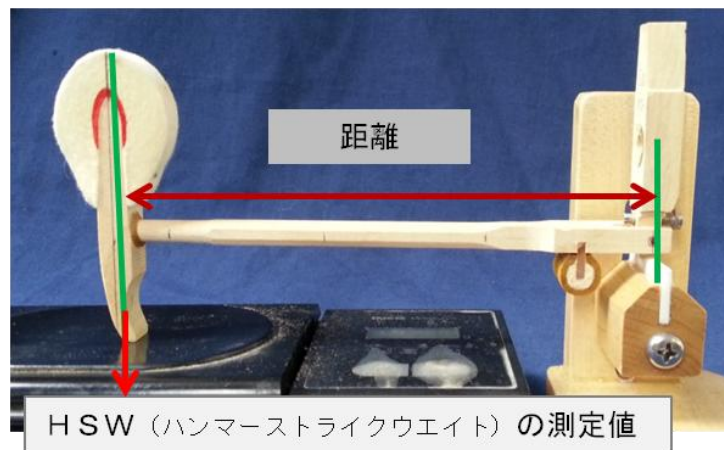
実際にそれぞれの部分の質量を求め、計算するとこのハンマーの慣性モーメント値は 1616 gcm^2 と計算されました。（通常物理学では Kgm^2 を単位として使いますが、ピアノのタッチに関して利用する際は gcm^2 を使うことを提案します。この単位が最も私たちの使用目的に合った数値が得られるからです。）



(図版1) 慣性モーメントを求めるために4分割されたハンマーアッセンブリー

さて、図版1の例ではシャンクを切って値を求めました。しかしこのやり方では日常業務に使用できません。そこで、通常使用する計測法としては図版2で示したやり方を提案します。ハンマーストライクウエイトにシャンクフレンジセンターからハンマーウッド中心線の距離を二乗したものをかけてそれを慣性モーメントの値とするのです。

図版1で使ったハンマーを切断前にこのやり方で測定しておきました。そこでは $1,720 \text{ gcm}^2$ という数値が得られました。先ほどの計測より6.5%大きい値です。どちらにしてもこちらのやり方でしか現実的に仕事ができませぬので、このギャップはギャップとして認識しながら、今後の測定値はすべてこちらのやり方で測定したものを使います。このやり方のメリットは、シャンクを切らなくて良い、というのは第一ですが、このHSW値はスタンウッドのやり方を利用する場合どちらにしても測定しなければならないものですし、ハンマーアッセンブリーのほとんどの質量はシャンクではなくハンマーにありますので、とても効率の良いやり方と言って良いでしょう。



(図版2) 慣性モーメントを算出するためにHSWとシャンクフレンジセンターとハンマーウッド中心線の距離を利用する。

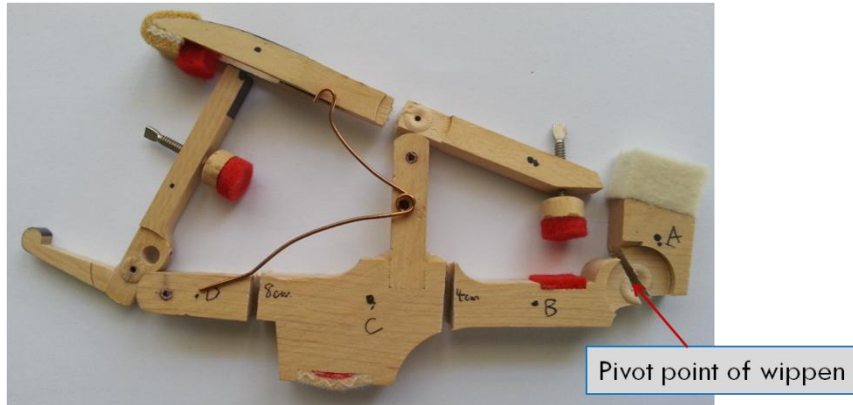
ウイペンアッセンブリー

ウイペンは複雑な形状をしているので何cmごと、という分割ではなく、形状を見て8つの部分に分けました(図版3)。フレンジは回転部分ではありませんので計算には入れません。回転軸はウイペンセンターピンの位置で、各部分の質量と、その重心と中心軸との距離の二乗をかけて算出します。

$$\text{MoI (Whippen)} = \sum m_n (s_n)^2$$

Σ は分割した部分の数値を合計するという記号で、 m は質量、 s は中心と重心との距離です。

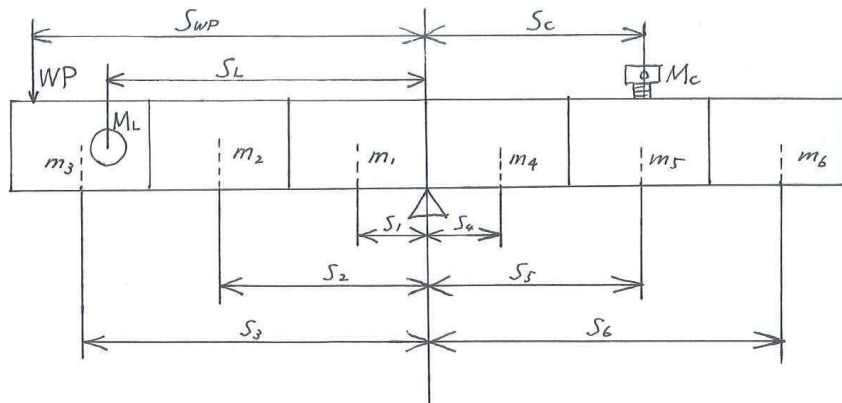
このサンプルのウイペン（Wippen）はスタインウェイのパーツですが、この部品は 756 gcm^2 と計算されました。後の方でハンマー・ウイペン・鍵盤のそれぞれの慣性モーメント値を比較しますが、他の部品に比べ大変小さい値のため、さほどタッチの重さに関わりません。



(図版 3) 慣性モーメントを求めるために適当な大きさに分解・切断されたウイペン

鍵盤

鍵盤の説明として図版 4 の模式図を使います。



(図版 4) 鍵盤を単純化した模式図を使って慣性モーメントの求め方を考える。

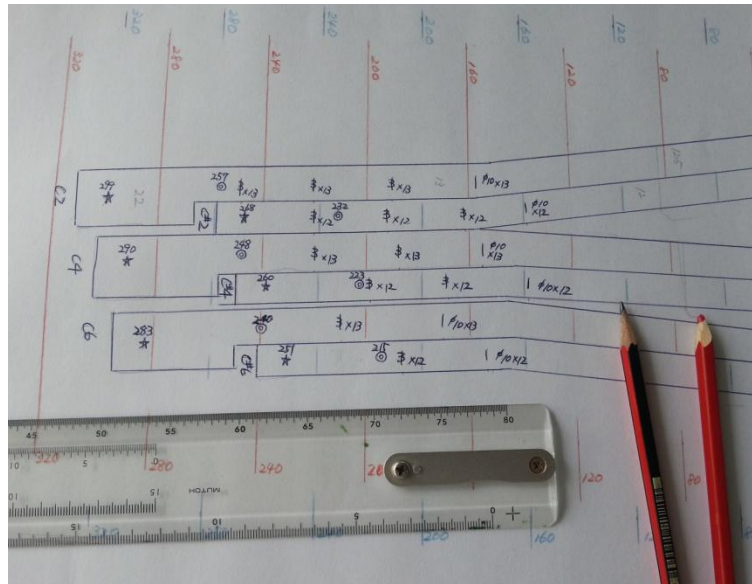
鍵盤の慣性モーメントもハンマーやウイペンと同じように求めます。鍵盤を 4 cm 間隔で分けて考え、鍵盤鉛やキャプスタンスクリューなどは個別に求めて最後に合計します。そうしますと、図版 4 で示したサンプルの鍵盤の慣性モーメントは、次のように求められます。

$$\text{MoI}_{(\text{key})} = m_1(s_1)^2 + m_2(s_2)^2 + m_3(s_3)^2 + m_L(s_L)^2 + m_4(s_4)^2 + m_5(s_5)^2 + m_6(s_6)^2 + m_c(s_c)^2$$

実際の測定では図版 5 のように紙に鍵盤の形状や鉛の位置などを写し取りそこから距離などの必要なデータを測ります。

まず、鍵盤を紙の上に乗せて外形を写し取ります。バランスホールの中心位置（鍵盤の回転中心点）、鉛の位置と直径・長さ、キャプスタンスクリューの位置、バックチェックの位置、座板中や座板後の位置や寸法、白鍵・黒鍵の重心位置などを書き入れます。

外せる部品、たとえばキャプスタンスクリューは取り外して質量を測定します。取り外せない部品、たとえば、白鍵・黒鍵材料やバックチェックなどは手持ちの代替品を測定して使用することでも十分です。鍵盤鉛は大きさがメーカーや時代によりまちまちなので、計算で体積を求めた上で密度をかけて質量を求めます（半径の二乗×円周率×長さ×密度）。密度は調べても分かりますが、手持ちの鉛を使って算出することも可能です。



(図版5) 鍵盤の慣性モーメントを求めるために、紙に鍵盤の詳細を写し取る。

木部は切断はもちろんせずに、スプルー部は4cmごとのブロックを想定して、それぞれの体積を幅×厚さ×4で求め、密度をかけて質量を求めます。楓やぶな材を使用している座板などは同じように質量を出した後スプルーの分割パターンに合わせて分散してそれぞれの区画に加算してあげます。

すべての部分を計測したら私の開発した慣性モーメント計算表にデータを入力します。データを入力すると、慣性モーメント値が自動計算されます(図版6)。

Nakamura Moment of Inertia (key) spread sheet																																												
Key #	Note	Statur	Whale Inertia	FW part1 date	Cant part2 date	CG part3 date	Lead (front)						Wood (front)						Key top		Wood (back)						Capsta		check		Lead (back)		Moment of Inertia											
							date of lead	mar of lead	date of lead	mar of lead	date of lead	mar of lead	date of lead	mar of lead	date of lead	mar of lead	date of lead	mar of lead	date of lead	mar of lead	date of lead	mar of lead	date of lead	mar of lead	date of lead	mar of lead	date of lead	mar of lead	date of lead	mar of lead	date of lead	mar of lead	date of lead	mar of lead	front	back	Whale key g cm2							
A	4#	C4	Original	56403	292	223	0.231	244	145	220	5.1	157	4.2	119	19.4	15	19.4	50	19.4	4.5	4.2	4.4	4.4	4.6	4.6	5.2	5.7	210	7.5	1.7	5.7	5.7	4.6	3.4	3.4	4.1	0.5	1510	6.7	249.0	5.2	37910	12493	50403
B			Isamitsuris	41119	292	24.7	0.278													4.5	4.2	4.4	4.4	4.6	4.6	5.2	5.7	210	7.5	1.7	5.7	5.7	4.6	3.4	3.4	4.1	0.5	1510	6.7	249.0	5.2	21429	12493	41119
C			protocoloris	44553	292	62.2	0.301													4.5	4.2	4.4	4.4	4.6	4.6	5.2	5.7	210	7.5	1.7	5.7	5.7	4.6	3.4	3.4	4.1	0.5	1510	6.7	249.0	5.2	23164	12493	44553
D			kyuzichimori	26544	292															4.5	4.2	4.4	4.4	4.6	4.6	5.2	5.7	210	7.5	1.7	5.7	5.7	4.6	3.4	3.4	4.1	0.5	1510	6.7	249.0	5.2	24055	12493	26544

(図版6) 中村慣性モーメント(鍵盤)計算表

実際の鍵盤でどのような値になるのか、私がこれまで計算した値の例を上げてみましょう。

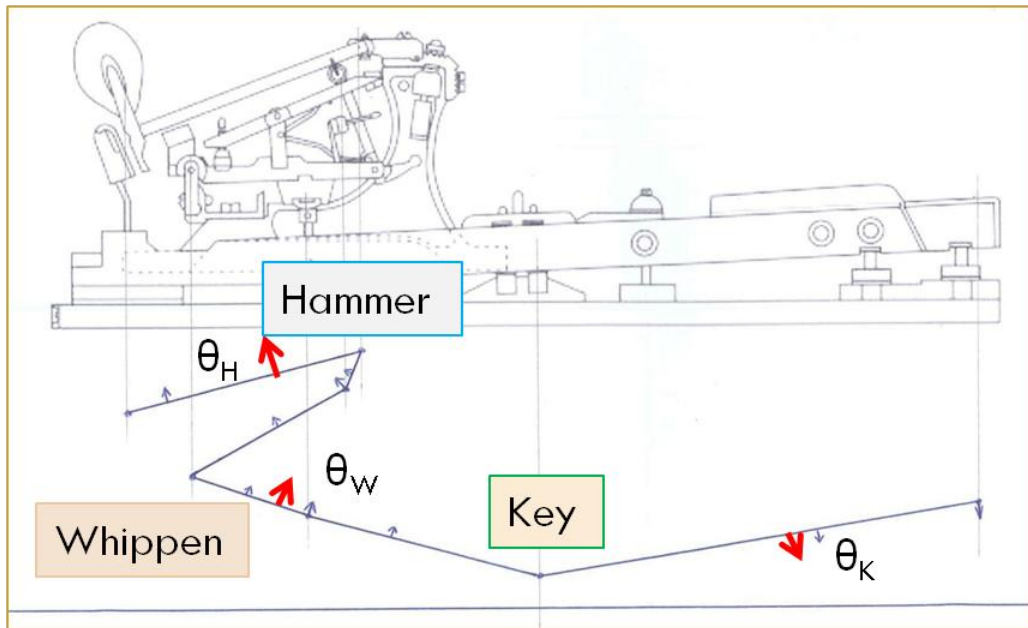
- スタインウェイD、最低音: $72,000 \text{ gcm}^2$
- スタインウェイD、中央のC音: $50,400 \text{ gcm}^2$
- ヤマハC3の中央のC音: $31,000 \text{ gcm}^2$
- カワイK3(アップライト)の中央のC音: $6,000 \text{ gcm}^2$

メーカーや機種、グランドかアップライトかによってその値にかなりの違いがあるのがわかります。

鍵盤手前で感じるアクション全体の慣性モーメントを算出する

前章ではアクション部品個々の慣性モーメント値を算出しました。実際に弾いたときに感じる慣性モーメントの量はそれぞれの値を合算したものではなく、工学の知識に則って計算しなければなりません。

ピアノを弾く場合、アクション全体の慣性モーメントの総和は鍵盤手前で感じることになります。これはファンデリックとローズが前掲の論文の中でピアノアクション機構の角度の比率によってそれを計算することを説明しました。



(図版7) 鍵盤が角度 θ_K 回転すると、ウイペンは θ_W 、ハンマーは θ_H 回転する。

図版7を見ていただくとわかる通り、鍵盤を弾くと鍵盤が回転運動をして、それがウイペンとハンマーにそれぞれ伝わります。たとえば鍵盤が θ_K 回転したときには、ウイペンは θ_W 、ハンマーは θ_H それぞれ回転します。そこで、さきほどの理論を当てはめてアクション全体の鍵盤手前での慣性モーメント値を考えてみると、次のようになります。

$$\begin{aligned} \text{MoI (Whole action at key)} &= \text{MoI (K)} + \text{MoI (W at key)} + \text{MoI (H at key)} \\ &= \text{MoI (K)} + \text{MoI (W)} \times (\theta_W/\theta_K)^2 + \text{MoI (H)} \times (\theta_H/\theta_K)^2 \end{aligned}$$

ウイペンとハンマーでは、回転する角度の比を二乗してそれぞれの慣性モーメント値にかけています。これで、全体の値が求められるわけですが、角度を測定するのは大変難しいことです。しかし次に説明するやり方を経て、これを長さの比に書き換えることが可能です。長さは簡単に測定できますので、この方が実用的な求め方となります。

$$\begin{aligned} \text{MoI (Whole action at key)} &= \text{MoI (K)} + \text{MoI (W at key)} + \text{MoI (H at key)} \\ &= \text{MoI (K)} + \text{MoI (W)} \times (L_{KO}/L_{WI})^2 + \text{MoI (H)} \times (L_{WO}/L_{HI} \times L_{KO}/L_{WI})^2 \end{aligned}$$

ここで、 L_{KO} は鍵盤の回転中心からキャプスタンスクリューの頂上中心までの距離、 L_{WI} はウイペンの回転中心とウイペンヒール下端のキャプスタンスクリューとの接点の中心までの距離、 L_{WO} はウイペン回転中心とジャック・ローラーの接点までの距離、 L_{HI} はローラー・ジャック接点からシャンクの回転中心点までの距離です。

鍵盤が θ_K 動いたときにキャプスタンスクリューは $L_{KO} \times \theta_K$ 動き、ウイペンヒールは $L_{WI} \times \theta_W$ 動きます。キャプスタンスクリューとウイペンヒールは同じだけ動いているわけですから次の式が成り立ちます。

$$L_{KO} \times \theta_K = L_{WI} \times \theta_W$$

これを書き換えて比の形にすると

$$\theta_W/\theta_K = L_{KO}/L_{WI}$$

となります。ですので、ウイペンの鍵盤手前で感じられる慣性モーメントは次の式によって求められるわけです。

$$\text{MoI}_{(W \text{ at key})} = \text{MoI}_{(W)} \times (\theta_W/\theta_K)^2 = \text{MoI}_{(W)} \times (L_{KO}/L_{WI})^2$$

つまり測定困難な角度の比の代わりに、測定可能な2つの長さの比によって計算が可能になります。

では、次にハンマーの鍵盤手前における慣性モーメントを求めてみましょう。

先に書いた通りハンマーが鍵盤手前で感じられる慣性モーメントの値は次の通りでした。

$$\text{MoI}_{(H \text{ at key})} = \text{MoI}_{(H)} \times (\theta_H/\theta_K)^2 = \text{MoI}_{(H)} \times (\theta_H/\theta_W \times \theta_W/\theta_K)^2$$

θ_H/θ_K は $\theta_H/\theta_W \times \theta_W/\theta_K$ と書き換えることができ、 θ_W/θ_K はすでに L_{KO}/L_{WI} で求められることを示しておきました。ここでは θ_H/θ_W を考えていきます。

ウイペンとハンマーの接点はジャックとローラーの接点で、鍵盤が θ_K 動いたときにジャック先端は $L_{WO} \times \theta_W$ 動き、ローラーは $L_{HI} \times \theta_H$ 動きます。ジャックとローラーは同じ距離動いているわけですから次の式が成り立ちます。先ほどと同じ考え方です。

$$L_{WO} \times \theta_W = L_{HI} \times \theta_H$$

式を変形し比の形で表すと

$$\theta_H/\theta_W = L_{WO}/L_{HI}$$

となります。ですので、ハンマーの慣性モーメントが鍵盤手前で感じられる量は、

$$\text{MoI}_{(H \text{ at key})} = \text{MoI}_{(H)} \times (\theta_H/\theta_K)^2 = \text{MoI}_{(H)} \times (\theta_H/\theta_W \times \theta_W/\theta_K)^2 = \text{MoI}_{(H)} \times (L_{WO}/L_{HI} \times L_{KO}/L_{WI})^2$$

と、4つの計測可能な距離の比に置き換えることができるわけです。念のため書き添えておきますと、この値はハンマーがウイペンと鍵盤を通じて鍵盤手前で感じられるものですので、ウイペンと鍵盤の慣性モーメントは入っていません。

さて、これで、アクションの3つの構成部品、鍵盤・ウイペン・ハンマーの鍵盤手前で感じられる慣性モーメントの値を算出することができました、アクション全体の慣性モーメント値は次の通り3つの値を足すことによって求められます。

$$\begin{aligned} \text{MoI}_{(Whole \text{ action at key})} &= \text{MoI}_{(K)} + \text{MoI}_{(W \text{ at key})} + \text{MoI}_{(H \text{ at key})} \\ &= \text{MoI}_{(K)} + \text{MoI}_{(W)} \times (L_{KO}/L_{WI})^2 + \text{MoI}_{(H)} \times (L_{WO}/L_{HI} \times L_{KO}/L_{WI})^2 \end{aligned}$$

ここでもう一度、計測する距離の詳細を書いておきましょう。

- L_{KO} は鍵盤の回転中心からキャプスタンスクリューの頂上中心までの距離
- L_{WI} はワイペンの回転中心とワイペンヒール下端のキャプスタンスクリューとの接点の中心までの距離
- L_{WO} はワイペン回転中心とジャック・ローラーの接点までの距離
- L_{HI} はローラー・ジャック接点からシャンクの回転中心点までの距離

ここで具体的な数値をあげてみます。あるスタインウェイD型の中央のC音のデータです。

ハンマーの鍵盤手前における慣性モーメント値は $202,577 \text{ gcm}^2$ でした。その詳細を書くと、HSWが 10.9 g 、距離が 13 cm で、単体での慣性モーメントは 10.9×13^2 、そして $(\theta_H/\theta_K) = 10.5$ だったので、鍵盤手前での値は $10.9 \times 13^2 \times (10.5)^2$ です。これを計算すると上記の値になります。

ワイペンの鍵盤手前における慣性モーメント値は $4,322 \text{ gcm}^2$ です。これはワイペン単体の慣性モーメント値 756 gcm^2 に角度比 $(\theta_w/\theta_K) = 2.14$ の二乗をかけて求めた値です。

鍵盤の慣性モーメント値は $50,463 \text{ gcm}^2$ でしたので、全部を合計すると $257,311 \text{ gcm}^2$ となります。すなわち、この音のアクションはこれだけの慣性モーメント値を持っているということになります。

パート2ではタッチウエイトを表示する2つの指標、静的な平衡を示すバランスウエイトと動的な抵抗を表すアクションの慣性モーメント値をどのように設定していくのか見ていきます。